Relations d'ordre floues sur des quantités floues et expression de requêtes flexibles

Fuzzy order relations on fuzzy quantities and flexible queries

Daniel Rocacher [1] Ludovic Liétard [2]
[1] IRISA/ENSSAT
[2] IRISA/IUT Lannion

BP 447, 22305 Lannion Cédex, France, rocacher@enssat.fr
BP 150, 22302 Lannion cédex, France, ludovic.lietard@iut-lannion.fr

Résumé :
Dans ce papier, nous définissons des relations d'ordre sur $\mathbb{Z}_f$ l'ensemble des entiers relatifs flous et sur $\mathbb{Q}_f$, l'ensemble des nombres rationnels flous. Puis, nous montrons que ce support permet de comparer des quantités floues et de traiter des requêtes flexibles comportant des quantificateurs absolus ou relatifs.

Mots-clés :
Entier relatif flou, nombre rationnel flou, relations d'ordre graduelles, tolérance, interrogation flexible.

Abstract:
In this paper, fuzzy order relations on $\mathbb{Z}_f$, the set of fuzzy relative integers, and on $\mathbb{Q}_f$, the set of fuzzy rational numbers, are defined. This framework allows to compare fuzzy quantities and to deal with flexible queries using absolute or relative fuzzy quantifiers.

Keywords:
Fuzzy relative integer, fuzzy rational number, gradual order relations, tolerance, flexible querying.

1. Introduction

Cette étude se place dans le contexte de l'interrogation flexible de bases de données usuelles. Nous avons montré [5] que la prise en compte de multi-ensembles flous [4], [9], [11] permet de manipuler conjointement des informations quantitatives et qualitatives sur une base de données. Un multi-ensemble flou est un multi-ensemble dont chaque occurrence d'un élément est associée à un degré d'appartenance. Par exemple, un multi-ensemble flou peut être délivré par la requête : *trouver le salaire des employés jeunes.* Comme plusieurs employés peuvent avoir le même salaire, le résultat peut contenir des doubles. De plus, chaque occurrence d'un salaire coïncide avec un employé plus ou moins jeune et est donc associée à un degré de satisfaction. Le multi-ensemble flou résultat correspond alors la distribution des « salaires des employés jeunes ».

Dans cet article, nous poursuivons ces travaux en nous intéressant à l'utilisation de ces notions pour traiter des requêtes comportant des quantificateurs absolus ou relatifs. Ainsi, compte tenu de nos propositions sur la modélisation des multi-ensembles flous, notre objectif est d'étudier des questions telles que : *est-ce qu'environ deux employés jeunes sont bien payés ?* ou *est-ce que la plupart des employés jeunes sont bien payés ?*

Dans [5] nous avons proposé une approche qui caractérise les multi-ensembles flous et permet de traiter de manière uniforme les ensembles, ensembles flous, multi-ensembles et multi-ensembles flous. Cette construction s'appuie sur le concept d'entier naturel flou ($\mathbb{N}_f$). Par la suite [6], [7], nous avons défini un cadre plus général, basé sur l'ensemble des entiers relatifs flous ($\mathbb{Z}_f$), dans lequel il est possible de définir des différences exactes. L'intérêt de cette démarche est d'offrir une base algébrique permettant la composition de calculs. Enfin, $\mathbb{Z}_f$ a été prolongé en $\mathbb{Q}_f$, [8], l'ensemble des nombres rationnels flous, afin de construire un système d'opérations multiplicatives fermé et de réaliser des divisions exactes. Ce contexte permet de traiter des requêtes flexibles basées sur des calculs entre quantités floues ou nécessitant la manipulation de multi-ensembles flous.

Notre objectif dans ce papier est de définir des relations d'ordre dans $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Q}_f$. Ceci permet, par exemple, de traiter des requêtes comportant des expressions quantifiées.

Par la suite, en section 2, la construction de $\mathbb{Z}_f$ est brièvement rappelée. Puis, en section 3, nous étudions comment définir des relations d'ordre et, plus généralement, des comparateurs sur $\mathbb{Z}_f$. Nous prolongeons cette analyse en section 4, et montrons, sans en détailler les principes, comment des relations d'ordre peuvent être définies sur $\mathbb{Q}_f$. Le cadre ainsi obtenu nous permet de proposer, en section 5, un mécanisme de base pour traiter des requêtes flexibles comportant des expressions quantitatives absolues ou relatives.

2. Entiers relatifs flous

Un entier positif n peut être vu comme la cardinalité d'un ensemble fini. De la même manière, un entier positif flou peut être vu comme la cardinalité d'un ensemble flou fini. La cardinalité floue |A| d'un ensemble flou A est définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mu_{|A|}(n) = \sup\{\alpha \ / \ |A_\alpha| \geq n\}.$$

Cette définition est aussi appelée FGCount(A) [12]. Le degré α, associé à un entier ω de |A|, évalue dans quelle mesure A contient **au moins** ω éléments. |A| est l'enveloppe convexe de l'ensemble flou des cardinalités des α-coupes de A, c'est un ensemble flou normalisé et convexe d'entiers dont la fonction d'appartenance est non croissante. On définit l'ensemble des entiers flous ($\mathbb{N}_f$) comme l'ensemble de toutes les cardinalités floues. Il est important de noter que ces nombres flous sont traités ici comme des ensembles flous **conjonctifs** d'entiers. Ils sont parfaitement connus, ne recouvrent aucune forme d'incertitude et, de ce point de vue, se différencient des nombres flous usuels interprétés comme des distributions de possibilités [1], [2], [3].

Nous avons montré que cette notion d'entier flou permet de définir le concept de multi-ensemble flou, c'est-à-dire de multi-ensemble dont les occurrences des différents éléments sont associées à un degré d'appartenance. En effet, un élément x, dans un multi-ensemble flou A, est caractérisé par un entier flou $\Omega_A(x)$ représentant la cardinalité de l'ensemble flou des occurrences de x dans A. Les opérations de composition de multi-ensembles flous (intersection, union, union additive, produit cartésien, …) peuvent ensuite être définies à partir d'opérations de base sur les entiers flous (min, max, $\oplus$, $\otimes$, …). La définition de ces opérations s'appuie sur le principe d'extension étendu [5] et respecte la propriété : $(x \text{ op } y)_\alpha = x_\alpha \text{ op } y_\alpha$. La coupe de niveau α d'un entier flou x étant définie comme le plus grand entier de x associé à un degré supérieur ou égal à α.

Exemple 2.1 : Soit le multi-ensemble flou suivant : A = {<1, 0.1, 0.1>/a, <0.5>/b} qui signifie que A contient trois occurrences de l'élément a, chacune étant affectée d'un degré d'appartenance, respectivement 1, 0.1 et 0.1, et une occurrence de b au degré 0.5.
Les nombres flous d'occurrences des éléments sont : $\Omega_A(a)$ = {1/0, 1/1, 0.1/2, 0.1/3} ; $\Omega_A(b)$ = {1/0, 0.5/1}. A peut également se noter : A = {{1/0, 1/1, 0.1/2, 0.1/3}*a, {1/0, 0.5/1}*b}. ♦

Sur $\mathbb{N}_f$, la différence de deux multi-ensembles flous peut ne pas être définie. C'est pourquoi $\mathbb{N}_f$ a été étendu en $\mathbb{Z}_f$, l'ensemble des entiers relatifs flous, et nous avons montré [7] que ce support permet une généralisation où la différence peut toujours être représentée.

Nous rappelons maintenant brièvement comment nous avons construit l'ensemble des entiers relatifs flous.

Soit a et b deux entiers naturels flous et $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence telle que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f,\ (a, b)\ \mathcal{R}\ (a', b') \ \text{ ssi } \ a \oplus b' = a' \oplus b, \qquad (1)$$

où l'addition $\oplus$ est définie sur $\mathbb{N}_f$. Nous définissons l'ensemble des entiers relatifs flous $\mathbb{Z}_f$ comme l'ensemble quotient $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f) / \mathcal{R}$ des classes d'équivalence sur $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f)$ par $\mathcal{R}$.

Un entier relatif flou x s'identifie donc à une classe d'équivalence, notée (x^+, x^-), où x^+ et x^- sont des entiers positifs flous. Par abus de langage, nous écrirons parfois « l'entier relatif flou (x^+, x^-) ».

Exemple 2.2 : Soit deux entiers flous positifs : a = {1/0, 1/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.2/4} ; b = {1/0, 1/1, 0.3/2}. Le couple (a, b) = ({1/0, 1/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.2/4}, {1/0, 1/1, 0.3/2}) est une instance de la classe d'équivalence définissant un entier relatif

flou ($\mathbb{Z}_f$). D'autres instances de cette classe peuvent être définies par les couples suivants :
(a', b') = ({1/0, 0.8/1, 0.5/2, 0.2/3}, {1/0, 0.3/1}) ;
(a'', b'') = ({1/0, 1/1, 0.9/2, 0.8/3, 0.5/4, 0.2/5}, {1/0, 1/1, 0.9/2, 0.3/3}). ♦

Une entier relatif flou $x = (x^+, x^-)$ peut donc prendre plusieurs formes équivalentes. Cependant, x peut également se décrire de façon compacte en énumérant les valeurs $(x^+_\alpha - x^-_\alpha)$ pour toutes ses α-coupes différentes. Ces valeurs sont des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$). On obtient ainsi une représentation canonique, notée x^c, définie par :

$$x^c = \sum \alpha_i / (x^+_{\alpha_i} - x^-_{\alpha_i}) \qquad (2)$$

où les α_i correspondent aux différentes α-coupes de x et les $(x^+_{\alpha_i} - x^-_{\alpha_i})$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.3 : La représentation canonique de (a, b) (cf. exemple 2.2) est obtenue en énumérant les valeurs de ses différentes α-coupes :

$(a, b)^c = \{1/0, 0.8/1, 0.5/2, 0.3/1, 0.2/2\}^c$. ♦

Par la suite, un nombre flou sera décrit en énumérant les valeurs de ses différentes α-coupes.

Si x et y sont deux entiers relatifs flous, l'addition, $x \oplus y$, et la multiplication, $x \otimes y$, sont définies[1] par les classes respectives : $(x^+ \oplus y^+, x^- \oplus y^-)$ et $((x^+ \otimes y^+) \oplus (x^- \otimes y^-), (x^+ \otimes y^-) \oplus (x^- \otimes y^+))$.

Comme dans $\mathbb{N}_f$ les opérations arithmétiques respectent $(x \text{ op } y)_\alpha = x_\alpha \text{ op } y_\alpha$, cette propriété s'applique également dans $\mathbb{Z}_f$. D'un point de vue pratique cela nous permet d'évaluer rapidement une opération sur $\mathbb{Z}_f$, en travaillant sur les différentes α-coupes de ses opérandes.

On note que tout entier relatif (x^+, x^-) a un opposé (x^-, x^+). La différence de deux nombres relatifs x et y se définit donc comme la somme de x et de l'opposé de y.

3. Relations d'ordre sur $\mathbb{Z}_f$

Comme un entier relatif flou peut prendre plusieurs formes équivalentes, la comparaison de deux entiers flous peut poser quelques difficultés. Ce problème est levé en opérant sur des formes canoniques. Ainsi, une relation d'ordre partielle stricte entre deux entiers flous peut être définie par : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}_f$, $a \geq b$ ssi $a \ominus b \in \mathbb{Z}_f^+$, où $\ominus$ est la différence sur $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Z}_f^+$ est l'ensemble des entiers relatifs flous dont toutes les α-coupes sont positives ou nulles. Autrement dit : $\forall \alpha \in]0, 1]$, $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$, où - est la différence sur $\mathbb{Z}$; les valeurs associées à la forme canonique $(a \ominus b)^c$ sont donc positives ou nulles.

Cette relation d'ordre est partielle car il suffit que pour une coupe α la propriété $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$ ne soit pas satisfaite, pour que a et b ne soient pas comparables au sens de la relation ≥ (même si α est faible).

Dans cette section, nous proposons, dans un premier temps, une extension qui consiste à prendre en compte une relation d'ordre graduelle, notée $\geq_g$, exprimant que plus un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé satisfont la propriété $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$, plus, globalement, $a \geq_g b$ est satisfait. Puis, dans un second temps, nous examinons comment introduire une notion de tolérance floue au sein même de la relation d'ordre afin de permettre à certaines α-coupes d'enfreindre, quelque peu, la relation d'ordre. Cette relation d'ordre graduelle et tolérante est notée $\geq_{gT}$.

3.1 Relation d'ordre graduelle

Soit les deux entiers relatifs flous a et b suivants : a = {1/0, 0.8/1, 0.5/2} ; b = {1/0, 0.9/1, 0.4/2}. Leur différence delta = $a \ominus b$ s'exprime sous une forme canonique en $\{1/0, 0.9/\text{-}1, 0.8/0, 0.5/1, 0.4/0\}^c$ et peut se représenter graphiquement par :

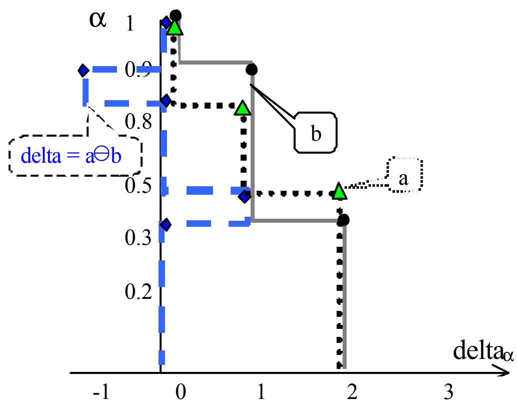

Figure 1 – Représentation graphique de deux entiers relatifs flous a et b et de leur différence.

---

[1] Dans cet article nous adoptons un principe de surcharge des opérateurs, ils se notent de la même manière dans $\mathbb{N}_f$, $\mathbb{Z}_f$ ou $\mathbb{Q}_f$

La satisfaction par α-coupes de la propriété a ≥ b peut se schématiser par :

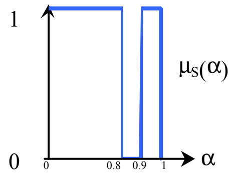

Figure 2 – Satisfaction globale de a ≥ b

Une tel résultat est un ensemble flou sur [0, 1], noté S, définissant les niveaux de satisfaction par α-coupes de la propriété a ≥ b. S se définit par : $\mu_S(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\text{delta}_\alpha < 0)$ et $\mu_S(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\text{delta}_\alpha \geq 0)$.

La question qui se pose est alors de «résumer » une satisfaction globale par un degré entre 0 et 1, c'est-à-dire d'en trouver une mesure *M* traduisant la sémantique « plus un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé satisfont la propriété $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$, plus, globalement, a ≥ b est satisfait ». Une telle mesure définit une relation d'ordre graduelle notée $\geq_g$: (a $\geq_g$ b) = *M*(S). Elle doit respecter un certain nombre de propriétés que nous analysons ci-dessous.

Propriété 1. Lorsque que a et b sont tels que toutes les α-coupes satisfont la propriété $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$, nous pouvons dire que la propriété est entièrement satisfaite. La satisfaction globale de la propriété a ≥ b est l'ensemble flou noté S1 tel que : $\forall\ \alpha \in\ ]0, 1]$, $\mu_{S1}(\alpha) = 1$. La mesure *M* de cet ensemble, qui évalue la satisfaction du prédicat graduel (a $\geq_g$ b), vaut 1.

Propriété 2. Lorsqu'aucune α-coupe ne satisfait la relation d'ordre, l'ensemble flou représentant la satisfaction globale est S0 = ∅ et sa mesure *M* vaut 0.

Propriété 3. Lorsque que a et b sont tels que toutes les α-coupes entre 0 et un seuil t satisfont la propriété $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$, la satisfaction globale est l'ensemble flou noté St tel que : $\mu_{St}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0, t]$, $\mu_{St}(\alpha) = 0$ sinon. La mesure *M* de St vaut t, elle exprime que le prédicat est complètement satisfait jusqu'au degré t. Cette propriété est cohérente avec les deux premières.

Propriété 4. Considérons les deux ensembles flous correspondant aux évaluations globales S2 et S3 de $a_2 \geq b_2$ et $a_3 \geq b_3$ suivants :

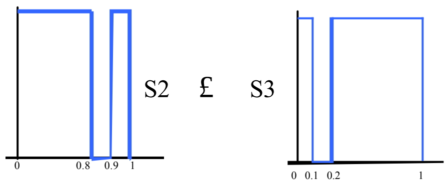

Figure 3 – Comparaison de satisfactions globales

On constate qu'il y a le même nombre d'α-coupes satisfaisantes dans S2 et dans S3. Cependant, dans S2 les α-coupes ayant une satisfaction nulle sont de degré plus élevé que celles de S3. Ainsi, globalement, on peut dire que la relation d'ordre est mieux satisfaite par a_3 et b_3 que par a_2 et b_2. Autrement dit, plus une α-coupe est de niveau élevé, plus son degré de satisfaction contribue à l'évaluation de *M*.

Propriété 5. Si S4 (respectivement S5) est l'ensemble flou représentant la satisfaction globale de la propriété $a_4 \geq b_4$ (resp. $a_5 \geq b_5$) et que l'ensemble flou S4 est inclus dans S5, nous déduisons qu'un plus grand nombre d'α-coupes de S5 satisfont la relation d'ordre. Dans ce cas *M*(S4) ≤ *M*(S5).

Différentes mesures *M* prenant en compte tout ou partie des propriétés précédemment énoncées peuvent être envisagées. Nous construisons maintenant progressivement une mesure satisfaisant nos objectifs.

La mesure M_0 définie comme l'intégrale de la fonction caractéristique $\mu_S(\alpha)$ de l'ensemble flou des satisfactions par α-coupes :

$$M_0(\mathrm{S}) = \int_0^1 \mu_S(\alpha) * d\alpha \qquad (3)$$

satisfait les propriétés 1, 2, 3 et 5 mais ne tient pas compte du niveau des α-coupes satisfaisantes. Pour ce faire, il faut pondérer $\mu_S(\alpha)$ par exemple par 2α, soit :

$$M_1(\mathrm{S}) = \int_0^1 \mu_S(\alpha) * 2\alpha * d\alpha\,. \qquad (4)$$

Mais dans ce cas, la propriété 3 n'est plus satisfaite. En effet, si la satisfaction globale est l'ensemble flou S tel que $\forall\ \alpha \in\ ]0, t]$, $\mu_S(\alpha) = 1$ et $\forall\ \alpha \in\ ]t, 1]$, $\mu_S(\alpha) = 0$, alors :

$$M_1(S) = \int_0^t 1*2\alpha*d\alpha = \left[\alpha^2\right]_0^t = t^2. \qquad (5)$$

Il en découle la mesure M_2 suivante satisfaisant les propriétés 1 à 5

$$M_2(S) = [M_1(S)]^{1/2}. \qquad (6)$$

Ainsi, pour les différents exemples présentés précédemment, nous obtenons les évaluations suivantes :

$$M_2(Sl) = (\int_0^1 1*2\alpha*d\alpha)^{1/2} = 1;$$

$$M_2(S0) = (\int_0^1 0*2\alpha*d\alpha)^{1/2} = 0;$$

$$M_2(S2) = (\int_0^{0.8} \mu_S(\alpha)*2\alpha*d\alpha + \int_{0.9}^1 \mu_S(\alpha)*2\alpha*d\alpha)^{1/2}$$
$$= (\left[\alpha^2\right]_0^{0.8} + \left[\alpha^2\right]_{0.9}^1)^{1/2} = 0.91 \;;$$

$$M_2(S3) = (\int_0^{0.1} \mu_S(\alpha)*2\alpha*d\alpha + \int_{0.2}^1 \mu_S(\alpha)*2\alpha*d\alpha)^{1/2}$$
$$= (\left[\alpha^2\right]_0^{0.1} + \left[\alpha^2\right]_{0.2}^1)^{1/2} = 0.98.$$

Ces différentes mesures sont bien ordonnées conformément à l'ordre induit par la sémantique « plus un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé sont satisfaisantes, plus la relation d'ordre est satisfaite ».

Par ailleurs, comme nous allons le montrer ci-dessous, cette relation d'ordre possède la particularité de généraliser une implication. L'idée développée est que, de même que la comparaison de deux degrés peut être interprétée comme une implication, la comparaison de deux entiers flous peut être interprétée comme une implication généralisée qui se réduit à une implication floue lorsqu'elle porte sur les entiers flous représentant des degrés.

Un entier flou peut être vu comme un degré lorsqu'il prend la forme $\{1/0, \alpha/1\}$. Dans ce cas, évaluons le prédicat $\{1/0, a/1\} \leq \{1/0, b/1\}$ et vérifions la compatibilité du résultat avec une implication floue $a \Rightarrow_f b$.

On calcule la différence delta = $\{1/0, b/1\} \ominus \{1/0, a/1\}$. Si $a \leq b$, delta est l'entier relatif flou noté en représentation canonique : $\{1/0, b/1, a/0\}^c$. Toutes ses coupes appartiennent à $\mathbb{Z}^+$, on en déduit que la mesure de satisfaction globale par α-coupes du prédicat (delta ≥ 0) est 1. Ce qui est cohérent avec l'évaluation de $a \Rightarrow_f b$. Si $a > b$, delta est l'entier relatif flou dont la représentation canonique est $\{1/0, a/-1, b/0\}^c$. La satisfaction globale de $a \Rightarrow_f b$ (ou delta ≥ 0) peut se représenter graphiquement par l'ensemble flou S de la figure 4.

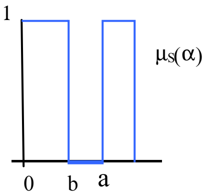

Figure 4 – Satisfaction globale de $a \Rightarrow_f b$

La mesure $M_0(S) = 1 - a + b$ est homogène au résultat obtenu par l'évaluation de $a \Rightarrow_f b$, avec $\Rightarrow_f$ l'implication floue de Luckasiewicz lorsque $a > b$. La mesure $M_1(S) = (1 - a^2 + b^2)^{1/2}$ est, quant à elle, homogène avec la R-implication quadratique, variante de l'implication de Luckasiewiecz. De manière plus générale, T. Wallen [10] a montré que les R-implications s'expriment par $(1- a^p + b^p)^{1/p}$ quand $a > b$, 1 sinon. La méthode que nous avons présentée est cohérente avec ce résultat en choisissant une intégrale pondérée par la fonction $p.\alpha^{p-1}$, ce qui établit la mesure M_1' :

$$M_1'(S) = \int_0^1 \mu_S(\alpha)*p\alpha^{p-1}*d\alpha, \qquad (7)$$

puis en définissant $M_2' = (M_1')^{1/p}$ afin de satisfaire la propriété 3. Cette dernière propriété correspond, en fait, à l'axiome des implications : $(1 \Rightarrow_f b) = b$.

Cette présentation de la relation d'ordre sur des entiers flous comme une implication généralisée est importante car elle s'inscrit dans notre démarche [5] de construction du concept de multi-ensemble flou comme généralisation à la fois du concept d'ensemble flou et du concept de multi-ensemble. En effet, les opérateurs sur les ensembles, basés sur des opérations sur des degrés, et les opérateurs sur les multi-ensembles, basés sur des opérations sur des entiers, peuvent être vus comme des cas particuliers d'opérateurs sur les multi-ensembles flous, basés sur des entiers flous. De manière analogue, la relation d'ordre sur des entiers flous, sous-jacente à une inclusion, généralise, d'une part, une implication entre degrés et, d'autre part, une relation d'ordre sur les entiers. Le lien entre la relation d'ordre sur les entiers et celle sur les entiers flous est assez facile à établir et nous ne le développerons pas dans ce papier.

3.2 Relation d'ordre graduelle tolérante

La relation d'ordre $\geq_g$ a pour but de rendre graduelle la relation d'ordre partielle stricte entre entiers relatifs flous et, par ce fait, définit une relation d'ordre total. Nous étudions maintenant une seconde extension consistant en une relaxation floue de la relation d'ordre graduelle $\geq_g$. En effet, nous souhaitons maintenant introduire une idée de tolérance graduelle dans la mesure de l'écart entre les deux entiers flous a et b à comparer. L'objectif est d'autoriser, dans une certaine mesure, des écarts légèrement négatifs pour certaines α-coupes. Cette tolérance peut s'exprimer au moyen d'un ensemble flou T, par exemple l'ensemble flou "au moins 0" suivant :

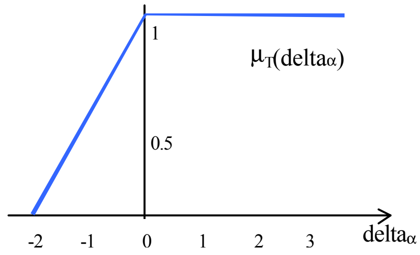

Figure 5 – Tolérance exprimant au moins 0

En conséquence, alors que dans le cas de la relation graduelle $\geq_g$ la satisfaction de chaque delta_α était soit 0, soit 1, celle-ci est maintenant comprise entre 0 et 1, compte tenu de la tolérance T. Pour l'exemple précédent, la satisfaction globale par α-coupe de a $\geq_{gT}$ b, où $\geq_{gT}$ est la relation d'ordre $\geq_g$ relâchée par la tolérance au moins 0, est définie par l'ensemble flou $S0_T$, tel que $\mu_{S0_T}(\alpha) = \mu_T(\text{delta}_\alpha)$, graphiquement représenté par :

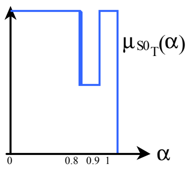

Figure 6 – $S0_T$ la satisfaction globale de a $\geq_{gT}$ b

De la même manière que précédemment, la mesure de cet ensemble peut s'exprimer en évaluant une moyenne pondérée. Ce qui conduit à évaluer le degré satisfaction de a $\geq_{gT}$ b par :

$$M_2(S0_T) = \left(\int_0^1 \mu_{S0T}(\alpha) * 2\alpha * d\alpha\right)^{1/2} = 0.95$$

Cette définition de relation d'ordre graduelle tolérante est en fait une définition générale permettant d'exprimer de nombreuses comparaisons entre quantités (floues ou non) basées sur leur différence. Selon la fonction de tolérance choisie, il est possible de construire des comparateurs comme « presque égal » ou « bien plus grand ». Par exemple, les ensembles flous décrits en figure 6 représentent des fonctions de tolérance qui permettent de construire de tels comparateurs.

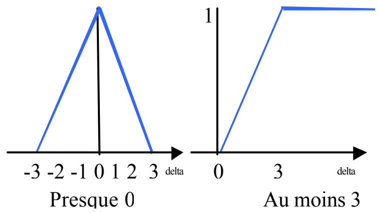

Figure 7 – Deux fonctions de tolérance

4. Relations d'ordre sur $\mathbb{Q}_f$

Dans cette section, nous présentons sommairement comment définir des relations d'ordre sur l'ensemble des nombres rationnels flous. Auparavant nous rappelons comment a été construit $\mathbb{Q}_f$ [8].

Définissons $\mathbb{Z}_f^*$ comme l'ensemble des éléments x de $\mathbb{Z}_f$ tel que : $\forall \alpha \in [0, 1]$, $x_\alpha \neq 0$, et $\mathcal{R}'$ la relation d'équivalence telle que :

$\forall$(a, b) et (a', b') $\in \mathbb{Z}_f \times \mathbb{Z}_f^*$, [a, b] $\mathcal{R}'$ [a', b'] ssi a $\otimes$ b' = a' $\otimes$ b. (8)

L'ensemble des nombres rationnels flous, noté $\mathbb{Q}_f$, est l'ensemble quotient $(\mathbb{Z}_f \times \mathbb{Z}_f^*) / \mathcal{R}'$ des classes d'équivalence sur $(\mathbb{Z}_f \times \mathbb{Z}_f^*)$ par la relation $\mathcal{R}'$.

Un nombre rationnel flou x est donc une classe d'équivalence dont une instance peut se noter $[x^n, x^d]$ où x^n et x^d appartiennent respectivement à $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Z}_f^*$. Une telle représentation peut également s'écrire à l'aide d'entiers positifs flous : $[(x^{n+}, x^{n-}), (x^{d+}, x^{d-})]$. Comme pour les entiers relatifs flous, il est possible de représenter un élément de $\mathbb{Q}_f$ sous une forme compacte obtenue en énumérant les valeurs associées à ses différentes α-coupes. Ces valeurs correspondent à des nombres rationnels. La forme compacte est canonique si les rationnels de ses différentes α-coupes sont réduits.

Si x et y sont deux nombres rationnels flous, l'addition, x $\oplus$ y, et la multiplication, x $\otimes$ y, sont définies respectivement par les classes : $[(x^n \otimes y^d) \oplus (y^n \otimes x^d), x^d \otimes y^d]$ et $[x^n \otimes y^n, x^d \otimes y^d]$. D'un point de vue calculatoire, on note que l'addition et la multiplication peuvent être évaluées en les appliquant sur les différentes α-coupes de leurs opérandes.

Si dans $\mathbb{Z}_f$ tout entier a un opposé, de même, dans $\mathbb{Q}_f$, tout rationnel $[x^n, x^d]$ a un inverse $[x^d, x^n]$ (si $x^n \in \mathbb{Z}_f^*$,). L'opération de division entre deux rationnels flous x et y, est alors définie comme la multiplication de x par l'inverse de y.

Notons $\mathbb{Q}_f^+$, l'ensemble des nombres flous rationnels positifs. La définition de la relation d'ordre graduelle (éventuellement) tolérante entre deux rationnels flous prolonge celle de $\mathbb{Z}_f$ et se définit par : $\forall(a, b) \in \mathbb{Q}_f$, $a \geq_{gT} b$ si et seulement si $a \ominus b \in \mathbb{Q}_f^+$, où $\ominus$ est la différence sur $\mathbb{Q}_f$. L'interprétation de cette relation se fait comme dans $\mathbb{Z}_f$: « plus un grand nombre de α-coupes (*ie* : $a_\alpha \ominus b_\alpha$) de niveau élevé sont satisfaisantes (par rapport au prédicat T), plus la relation d'ordre est satisfaite ». Elle s'évalue au moyen d'une intégrale pondérée de la satisfaction globale du prédicat T.

5. Application aux requêtes flexibles

L'intérêt majeur des multi-ensembles flous pour l'interrogation flexible, outre le fait d'offrir un cadre général dans lequel ensemble, multi-ensemble et ensemble flou peuvent être traités conjointement, est de permettre la prise en compte d'informations à la fois qualitatives et quantitatives. L'utilisation de quantités floues et de relations d'ordre sur ces quantités, rend possible le traitement de requêtes flexibles comportant des quantificateurs absolus ou relatifs flous.

À titre d'exemple applicatif nous allons examiner comment traiter les deux requêtes suivantes : 1) *est-ce qu'environ deux employés jeunes sont bien payés ?* 2) *est-ce que la plupart des employés jeunes sont bien payés ?*

La première requête comporte une proposition quantifiée du type "Q X sont A" où Q est le quantificateur absolu *environ 2*. Elle se traite simplement en évaluant la cardinalité floue de l'ensemble flou des employées *jeunes et bien payés*, puis en calculant, dans $\mathbb{Z}_f$, la différence entre cette cardinalité et la valeur 2. L'entier relatif flou obtenu est ensuite filtré par le prédicat flou presque 0.

Ainsi, soit $\{1/p_1, 1/p_2, 0.4/p_3, 0.1/p_4\}$ un ensemble flou de personnes *jeunes*. Supposons que ces personnes ont des salaires respectifs de 2500, 1000, 2000 et 1000 €, et que $\mu_{bienPayé}(2500) = 1$, $\mu_{bienPayé}(2000) = 0.7$ et $\mu_{bienPayé}(1000) = 0.2$. Nous en déduisons que l'ensemble des personnes *jeunes et bien-payées* = $\{1/p_1, 0.2/p_2, 0.4/p_3, 0.1/p_4\}$ dont la cardinalité est notée : $\{1/1, 0.4/2, 0.2/3, 0.1/4\}^c$. La différence entre cette cardinalité et 2 est l'entier relatif flou : $\{1/-1, 0.4/0, 0.2/1, 0.1/2\}^c$. La satisfaction globale du prédicat "delta presque 0 (figure 7) " est représentée par la figure 8.

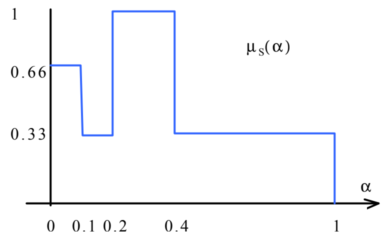

Figure 8 – Satisfaction globale de delta presque 0

Cette satisfaction peut se résumer par la mesure :

$$M_2(S) = \left(\int_0^1 \mu_S(\alpha) * 2\alpha * d\alpha\right)^{1/2} = 0.63.$$

La seconde requête comporte une proposition quantifiée du type "Q B X sont A" qui s'interprète par : l'ensemble des éléments qui vérifient A contient Q éléments qui vérifient B. L'exemple choisi se traite en évaluant la proportion du nombre d'employés *jeunes et bien payés* par rapport au nombre d'employés *jeunes*. Plus ce rapport est proche de 1 plus la plupart des employés jeunes sont bien payés. Quand le rapport vaut 1, tous les employés jeunes sont bien payés. On réalise donc, dans $\mathbb{Q}_f$, la division entre deux cardinalités floues. Le quotient obtenu est ensuite comparé à 1, c'est-à-dire filtré par un prédicat flou "presque 1" préalablement spécifié, comme :

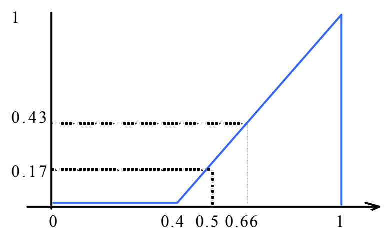

Figure 9 – Prédicat flou presque1

Ainsi, si la cardinalité de l'ensemble flou des employés *jeunes* est $\{1/2, 0.4/3, 0.1/4\}^c$, le rapport du nombre d'employés *jeunes et bien payés* sur le nombre d'employés *jeunes* est le nombre rationnel flou représenté sous forme compact par : {1/1:2, 0.4/2:3, 0.2/1}^{c}. En évaluant ce rapport en fonction du prédicat presque 1, nous en déduisons une satisfaction globale S qui est représentée graphiquement par :

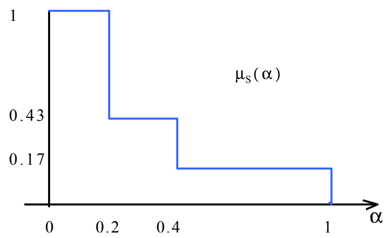

Figure 10 – Satisfaction globale de {1/1:2, 0.4/2:3, 0.2/1}^{c} par rapport au prédicat presque 1

Cette satisfaction peut se résumer par M_2(S) :

$$M_2(\mathrm{S}) = \left(\int_0^1 \mu_S(\alpha) * 2\alpha * d\alpha\right)^{1/2} = \sqrt{0.23} = 0.48.$$

6. Conclusion

Cette étude se place dans le contexte de l'interrogation flexible de bases de données usuelles. La prise en compte des multi-ensembles flous permet de manipuler conjointement des informations quantitatives et qualitatives sur les données. Leur définition, dans le cadre général des nombres entiers naturels flous ($\mathbb{N}_f$) offre un cadre dans lequel les ensembles, ensembles flous, multi-ensembles et multi-ensembles flous sont traités de manière uniforme.

L'extension de $\mathbb{N}_f$ à $\mathbb{Z}_f$ puis $\mathbb{Q}_f$, introduit des généralisations structurelles dans lesquelles il est possible de définir des opérations de différence et de division exactes. De telles opérations ont de nombreuses applications et, notamment, comme nous le montrons dans cet article, elles permettent de traiter des requêtes comportant des quantificateurs absolus ou relatifs.

La démarche consiste à définir une relation d'ordre générique basée sur le calcul de l'écart entre deux nombres flous et l'interprétation de celui-ci relativement à une fonction de tolérance. Ceci produit un résultat de satisfaction globale par α-coupe (ensemble flou) qu'il est possible de résumer au moyen d'un degré de satisfaction évalué par une intégrale pondérée. Nous avons montré qu'une telle mesure est cohérente avec les R-implications. Ce principe de comparaison entre deux quantités floues est ensuite utilisé pour évaluer des requêtes prenant en compte des quantificateurs absolus. L'extension $\mathbb{Q}_f$ nous permet de définir des rapports entre quantités floues qu'il est ensuite possible de comparer. Nous traitons de cette manière des requêtes comportant des quantificateurs relatifs.

Ces propositions peuvent se poursuivre en étudiant de quelle manière des prédicats comportant des relations d'ordre sur des quantités floues peuvent être composés au moyen d'opérateurs logiques. L'idée consiste non pas à composer des degrés qui synthétisent des satisfactions globales, mais plutôt à composer ces satisfactions globales (représentées par des ensembles flous) puis à y appliquer une mesure afin d'obtenir un degré de satisfaction.

Références

[1] Dubois D., Prade H., "Fuzzy cardinality and modeling of imprecise quantification", Fuzzy Sets and Systems , 16, 3, pp 199-230, 1985.

[2] Dubois D., Prade H., "Fuzzy numbers: an overview", Analysis of fuzzy information, Mathematics and Logics, vol.I,, pp 3-39, 1987.

[3] Dubois D., Prade H "Scalar evaluations of fuzzy sets: overview and applications", Appl. Math. Lett., vol. 3, n° 2, pp 37-42, 1990.

[4] Miyamoto S., "Fuzzy Multisets and Fuzzy Clustering of Documents ", 10th Inter. Conf. on Fuzzy Systems, (FUZZ IEEE'01), 2001.

[5] Rocacher D., "On fuzzy bags and their application to flexible querying," *Fuzzy Sets and Systems*, 140, pp 93-110, 2003.

[6] Rocacher D., Bosc P., "About Zf, the set of fuzzy relative integers, and the definition of fuzzy bags on Zf," Lecture Notes in Computer Science, LNCS 2715, Springer-Verlag, pp 95-102, 2003.

[7] Rocacher D., Bosc P., "Entiers relatifs flous et multi-ensembles flous", Rencontres francophones sur la logique floues et ses applications, (LFA'03), Tours, pp 253-260, 2003.

[8] Rocacher D., Bosc P., "Sur la définition des nombres rationnels flous", Rencontres francophones sur la logique floues et ses applications, (LFA'03), Tours, pp 261-268, 2003.

[9] Rocacher D., Connan C., "Flexible queries in object-oriented databases : on the study of bags", 8th Inter. Conf. on Fuzzy Systems, 1999.

[10] Whalen T., "Parameterized R-implications", *Fuzzy Sets and Systems*, 134, pp 231-281, 2003.

[11] Yager R., "On the theory of bags", Inter. J. of General Systems, vol. 13, pp 23-27, 1986.

[12] Zadeh L. A., "A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages", Comp. Math. App., vol. 9, pp 149-184, 1983.